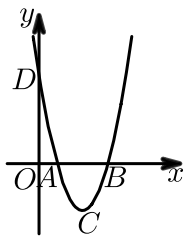
第3讲二次函数与角度存在性加油站

一、 定角问题

1. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数$y=ax^2+bx+6$的图象交x轴于A、B两点，交y轴于点D，点C为抛物线的顶点，且A、B两点的横坐标分别为1和3．



（1）写出A、B两点的坐标．

（2）求二次函数的解析式．

（3）在（2）的抛物线上，是否存在一点P，使得$\angle BAP=45°$？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$A(1,0)$，$B(3,0)$．

（2）$y=2x^2-8x+6$．

（3）存在，$P\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$或$\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$．

【解析】（1）∵二次函数$y=ax^2+bx+6$的图象交x轴于A、B两点，

且A、B两点的横坐标分别为1和3，

∴$A(1,0)$，$B(3,0)$．

（2）由（1）知，$A(1,0)$，$B(3,0)$，

∵二次函数$y=ax^2+bx+6$的图象交x轴于A、B两点，

$\therefore\begin{cases}a+b+6=0\\9a+3b+6=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a=2\\b=-8\end{cases}$，

∴二次函数的解析式为$y=2x^2-8x+6$．

（3）假设存在点P，设直线AP的解析式为$y=mx+n$，

∵$\angle BAP=45°$，

∴$|m|=1$，

当点P在x轴上方时，$m=1$，

∵$A(1,0)$，

∴直线AP的解析式为$y=x-1$①，

∵点P在抛物线$y=2x^2-8x+6$②上，

∴联立①②得$\begin{cases}y=x-1\\y=2x^2-8x+6\end{cases}$，

∴$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$（舍去）或$\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

∴$P\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，

当点P在x轴下方时，$m=-1$，

∵$A(1,0)$，

∴直线AP的解析式为$y=-x+1$③，

联立②③得$\begin{cases}y=-x+1\\y=2x^2-8x+6\end{cases}$，

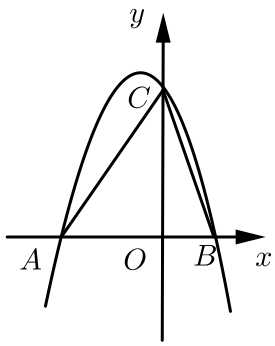
∴$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$，

∴$P\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，

即：$P\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)$或$\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

2. 如图，已知抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于点A，B，与y轴交于点C，且$OA=OC$，$\tan\angle ABC=3$，$CB=\sqrt{10}$，点P在抛物线的对称轴上．



（1）求抛物线的解析式．

（2）当直线AP与直线AC的夹角为$15°$时，求出直线AP的解析式．

【答案】（1）$y=-x^2-2x+3$．

（2）$y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$或$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$．

【解析】（ 1 ）设$OA=OC=3k(k>0)$，

$\because \tan\angle ABC=\dfrac{OC}{OB}=3$，

$\therefore OB=k$，

在Rt△OBC中，$BC^2=OB^2+OC^2$，

则$(3k)^2+k^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$，

得$k=1$，

$\therefore OC=3$，$OB=1$，

$\therefore B(1,0)$，$C(0,3)$，$A(-3,0)$，

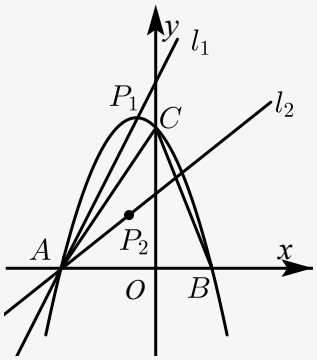
把A、B、C三点代入$y=ax^2+bx+c$得：

$\begin{cases}0=a+b+c\\3=c\\0=9a-3b+c\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=3\end{cases}$，

$\therefore y=-x^2-2x+3$．

（ 2 ）①如图，当AP在AC上方时，由①得，△AOC为等腰直角三角形，



$\therefore\angle CAO=45°$，

$\therefore\angle P_1AO=60°$，

$\therefore k_{AP_1}=\tan 60°=\sqrt{3}$，

设AP_1的直线l_1为$y=\sqrt{3}x+b$，

代入$A(-3,0)$，

得：$b=3\sqrt{b}$，

$\therefore y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$．

②当AP在AC下方时，设直线AP为l_2，

则$\angle P_2AB=30°$，

$\therefore k_{AP_2}=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设AP_2的直线为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b$，

代入$A(-3,0)$，

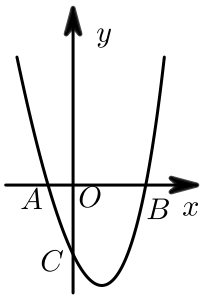
得$b=\sqrt{3}$，

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.

综上：AP的直线解析式为$y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$或$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

3. 如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx-3$（$a\neq 0$）与x轴交于点$A(-1,0)$和点B，且$OB=3OA$，与y轴交于点C，此抛物线顶点为点D.



（1）求抛物线的表达式及点D的坐标.

（2）如果点E是y轴上的一点（点E与点C不重合），当$BE\perp DE$时，求点E的坐标.

（3）如果点F是抛物线上的一点，且$\angle FBD=135°$，求点F的坐标.

【答案】（1）$y=(x-1)^2-4$，$D(1,-4)$.

（2）$E(0,-1)$.

（3）$F(-4,21)$.

【解析】（1）$y=x^2-2x-3\Rightarrow y=(x-1)^2-4$.

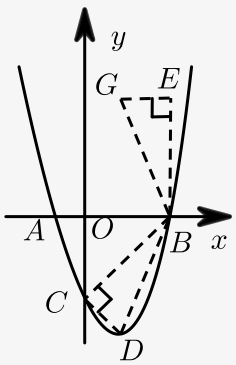
$\therefore D(1,-4)$.

（2）设$E(0,t)$，

则$BE^2+DE^2=BD^2\Rightarrow t_1=-3$（舍），$t_2=-1$，

$\therefore E(0,-1)$.

（3）方法一：由（2）得$\angle BCD=90°$，



$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BEG$，

$EG = CD = \sqrt{2}$，$BE = BC = 3\sqrt{2}$，$\angle DBG = 135°$，

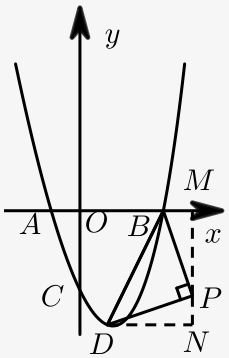
$\therefore G(3-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$，

又$B(3,0)$，

$\therefore BF: y = -3x + 9$，

$\therefore \begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow F(-4, 21)$．

方法二：也可构造如图所示辅助线，$\triangle BDP$为等腰直角三角形，利用$\triangle DNP \cong \triangle PMB$．



可求得P点坐标，求解即可．

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与角度问题

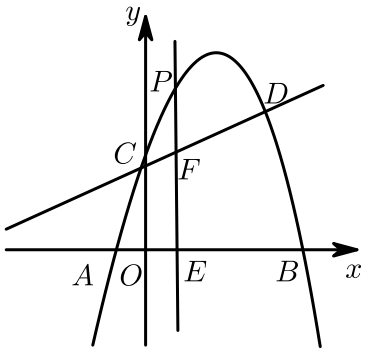
【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】勾股定理

【能力】运算能力

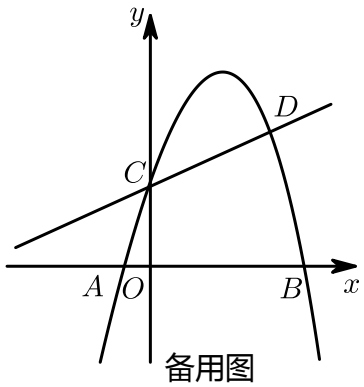
【思想】函数思想

4. 如图，抛物线$y = -x^2 + bx + c$与直线$y = \frac{1}{2}x + 2$交于C、D两点，其中点C在y轴上，点D的坐标为$(3, \frac{7}{2})$．点P是y轴右侧的抛物线上一动点，过点P作$PE \perp x$轴于点E，交CD于点F．



（ 1 ）求抛物线的解析式．

（ 2 ）若存在点P，使$\angle PCF=45°$，请直接写出相应的点P的坐标．



备用图

【答案】（ 1 ）抛物线的解析式为$y=-x^2+\frac{7}{2}x+2$．

（ 2 ）$P_1(\frac{1}{2},\frac{7}{2})$，$P_2(\frac{23}{6},\frac{13}{18})$．

【解析】（ 1 ）∵直线$y=\frac{1}{2}x+2$经过点C，

∴$C(0,2)$

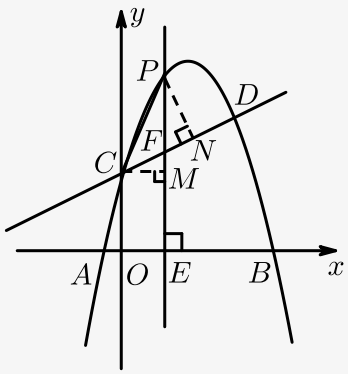
∵抛物线$y=-x^2+bx+c$经过点$C(0,2)$，$D(3,\frac{7}{2})$，

∴$\begin{cases}2=c\\ \frac{7}{2}=-3^2+3b+c\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=\frac{7}{2}\\ c=2\end{cases}$．

∴抛物线的解析式为$y=-x^2+\frac{7}{2}x+2$．

（ 2 ）如图，当点P在CD上方且$\angle PCF=45°$时，



答图 2

作$PM\perp CD$，$CN\perp PF$

则$\triangle PMF\backsim\triangle CNF$，

∴$\frac{PM}{MF}=\frac{CN}{FN}=\frac{m}{\frac{1}{2}m}=2$，

∴$PM=CM=2CF$，

$\therefore PF=\sqrt{5}FM=\sqrt{5}CF=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}CN=\frac{5}{2}CN=\frac{5}{2}m$.

又$\because PF=-m^2+3m$ ，

$\therefore -m^2+3m=\frac{5}{2}m$ ，

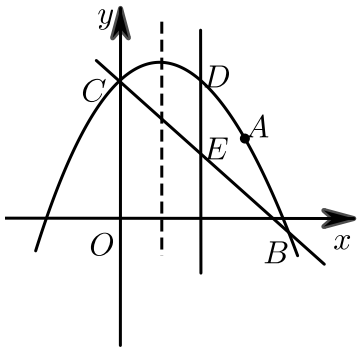
解得：$m_1=\frac{1}{2}$ ，$m_2=0$（舍去），

$\therefore P(\frac{1}{2},\frac{7}{2})$.

同理可以求得：另外一点为$P(\frac{23}{6},\frac{13}{18})$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

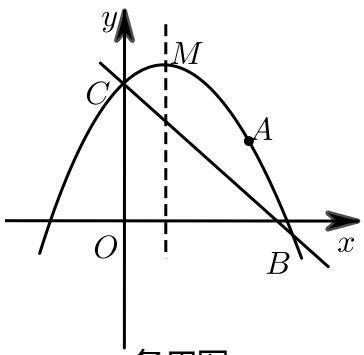
5. 如图，抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$过点$A(3,2)$，且与直线$y=-x+\frac{7}{2}$交于B、C两点，点B的坐标为$(4,m)$.



（ 1 ）求抛物线的解析式 .

（ 2 ）点D为抛物线上位于直线BC上方的一点，过点D作$DE\perp x$轴交直线BC于点E，点P为对称轴上一动点，当线段DE的长度最大时，求$PD+PA$的最小值 .

（ 3 ）设点M为抛物线的顶点，在y轴上是否存在点Q，使$\angle AQM=45°$？若存在，求点Q的坐标；若不存在，请说明理由 .



备用图

【答案】（ 1 ）$y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$.

（ 2 ）$\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

（ 3 ）存在，$\left(0,2+\sqrt{3}\right)$或$\left(0,2-\sqrt{3}\right)$.

【解析】（1）将点B的坐标$(4,m)$代入$y=-x+\frac{7}{2}$，

$m=-4+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore B$的坐标为$\left(4,-\frac{1}{2}\right)$，

将$A(3,2)$，$B\left(4,-\frac{1}{2}\right)$代入$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$，

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\times 3^2+3b+c=2\\-\frac{1}{2}\times 4^2+4b+c=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

解得$b=1$，$c=\frac{7}{2}$，

$\therefore$抛物线的解析式$y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$．

（2）设$D\left(m,-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{7}{2}\right)$，则$E\left(m,-m+\frac{7}{2}\right)$，

$DE=\left(-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{7}{2}\right)-\left(-m+\frac{7}{2}\right)$

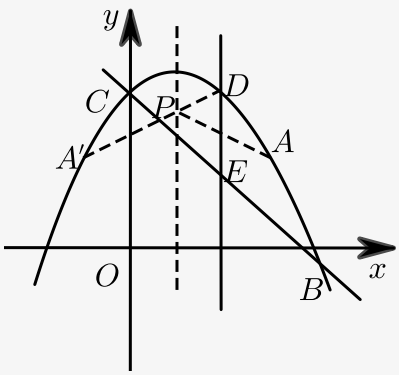
$=-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{7}{2}+m-\frac{7}{2}$

$=-\frac{1}{2}m^2+2m=-\frac{1}{2}(m-2)^2+2$，

$\therefore$当$m=2$时，DE有最大值为2，

此时$D\left(2,\frac{7}{2}\right)$，

作点A关于对称轴的对称点A'，连接$A'D$，与对称轴交于点P，



$PD+PA=PD+PA'=A'D$，此时$PD+PA$的值最小，

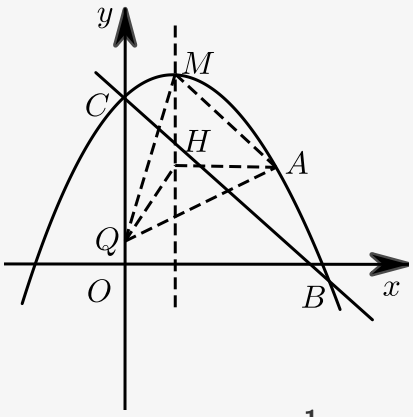
$\because A(3,2)$，对称轴为直线$x=1$，

$\therefore A'(-1,2)$，

$A'D=\sqrt{(-1-2)^2+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$，

即$PD+PA$的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{5}$．

（3）作$AH\perp$对称轴于点H，连接AM、AQ、MQ、HQ，



∵抛物线的解析式$y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$，

∴$M(1,4)$，

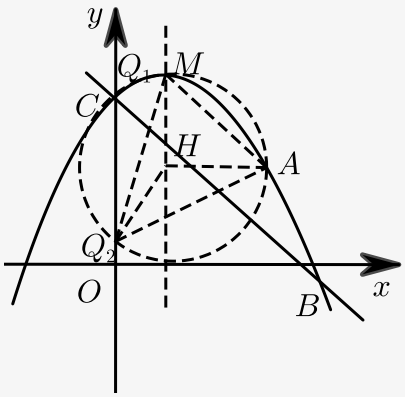
∵$A(3,2)$，

∴$AH=MH=2$，$H(1,2)$

∵$\angle AQM=45°$，$\angle AHM=90°$，

∴$\angle AQM=\frac{1}{2}\angle AHM$，

可知△AQM外接圆的圆心为H，



∴$QH=HA=HM=2$，

设$Q(0,t)$，

则$\sqrt{(0-1)^2+(t-2)^2}=2$，

$t=2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}$，

∴符合题意的点Q的坐标：$Q_1\left(0,2+\sqrt{3}\right)$、$Q_2\left(0,2-\sqrt{3}\right)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题；瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为其他

二、 等角问题

6. 如图，抛物线与x轴交于点A、$B(3,0)$，与y轴交于点C，其顶点D的坐标为$(1,-4)$，P为抛物线上x轴下方一点．

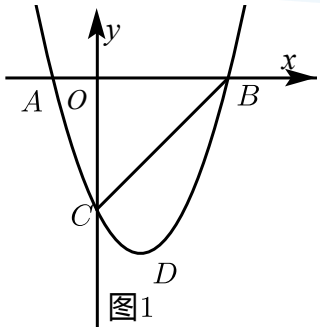


图1

（ 1 ）求抛物线的解析式．

（ 2 ）若$\angle PCB=\angle ACB$，求点P的坐标．

【答案】（ 1 ）$y=x^2-2x-3$．

（ 2 ）$P\left(\frac{5}{3},-\frac{32}{9}\right)$．

【解析】（ 1 ）设$y=a(x-1)^2-4$，

将$(3,0)$代入解得$a=1$，

$\therefore y=x^2-2x-3$，

故答案为：$y=x^2-2x-3$．

（ 2 ）过点B作$BM\perp AB$交CP延长线于点M，

则$\triangle ABC\cong\triangle MBC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BM=AB=4$，

$\therefore M(3,-4)$，

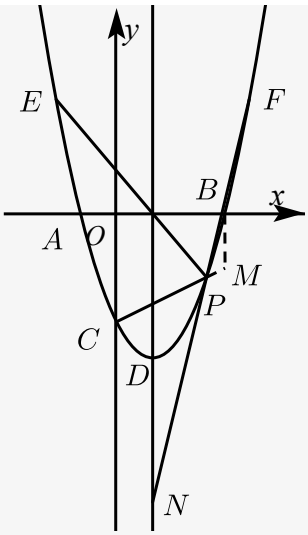
$\therefore y_{CM}=-\frac{1}{3}x-3$，

由$\begin{cases}y=-\frac{1}{3}x-3\\y=x^2-2x-3\end{cases}$

得$\begin{cases}x_1=\frac{5}{3}\\y_1=-\frac{32}{9}\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=0\\y_2=-3\end{cases}$（舍），

$\therefore P\left(\frac{5}{3},-\frac{32}{9}\right)$，

故答案为：$P\left(\frac{5}{3},-\frac{32}{9}\right)$．



如图1，过点B作$BM//y$轴交CP延长线于点M，

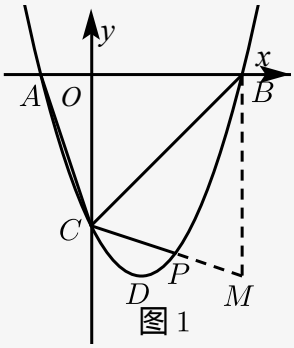


图 1

$\because y=0$时，$x^2-2x-3=0$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=3$

$\therefore A(-1,0)$，$AB=3-(-1)=4$．

$\because x=0$时，$y=x^2-2x-3=-3$，

$\therefore C(0,-3)$，

$\therefore OB=OC=3$，

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=45°$．

$\because OC//BM$，

$\therefore \angle MBC=\angle OCB=\angle OBC=45°$．

在$\triangle ABC$与$\triangle MBC$中

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle MBC\\ BC=BC\\ \angle ACB=\angle MCB\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle MBC(\mathrm{ASA})$，

$\therefore BM=AB=4$，

$\therefore M(3,-4)$，

设直线CM解析式为$y=cx-3$，

$\therefore 3c-3=-4$，解得：$c=-\dfrac{1}{3}$，

∴直线$CM:y=-\frac{1}{3}x-3$．

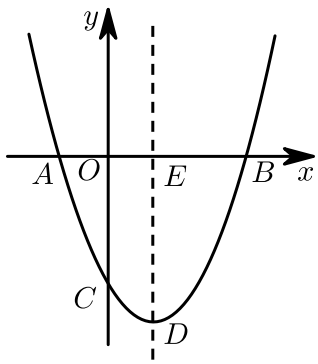
∵$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-3\\y=x^2-2x-3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=0\\y_1=-3\end{cases}$（即点$C$）$\begin{cases}x_2=\frac{5}{3}\\y_2=\frac{32}{9}\end{cases}$，

∴点P为$\left(\frac{5}{3},-\frac{32}{9}\right)$．

【标注】【题型】题型：动直线（线段）与定抛物线交点问题

7. 如图，抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$与x轴交于A、B两点，与y轴交于点C，其对称轴交抛物线于点D，交x轴于点E，已知$OB=OC=6$．



（1）求抛物线的解析式及点D的坐标．

（2）连接BD，F为抛物线上一动点，当$\angle FAB=\angle EDB$时，求点F的坐标．

【答案】（1）$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$．$(2,-8)$．

（2）$\left(7,\frac{9}{2}\right)$或$\left(5,-\frac{7}{2}\right)$．

【解析】（1）∵$OB=OC=6$，

∴$B(6,0)$，$C(0,-6)$，

∴$\begin{cases}\frac{1}{2}\times6^2+6b+c=0\\c=-6\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-2\\c=-6\end{cases}$，

∴抛物线解析式为$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$，

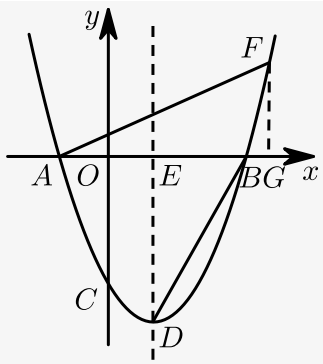
∵$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8$，

∴点D的坐标为$(2,-8)$．

（2）如图，过F作$FG\perp x$轴于点G，

设$F\left(x,\frac{1}{2}x^2-2x-6\right)$，则$FG=\left|\frac{1}{2}x^2-2x-6\right|$，

在$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$中，令$y=0$可得$\frac{1}{2}x^2-2x-6=0$，解得$x=-2$或$x=6$，



$\therefore A(-2,0)$，

$\therefore OA=2$，则$AG=x+2$，

$\because B(6,0)$，$D(2,-8)$，

$\therefore BE=6-2=4$，$DE=8$，

当$\angle FAB=\angle EDB$时，且$\angle FGA=\angle BED$，

$\therefore \triangle FAG\backsim\triangle BDE$，

$\therefore \dfrac{FG}{BE}=\dfrac{AG}{DE}$，即$\dfrac{\left|\frac{1}{2}x^2-2x-6\right|}{x+2}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，

当点F在x轴上方时，则有$\dfrac{\frac{1}{2}x^2-2x-6}{x+2}=\dfrac{1}{2}$，解得$x=-2$（舍去）或$x=7$，

此进F点坐标为$\left(7,\dfrac{9}{2}\right)$．

当点F在x轴上方时，则有$\dfrac{\frac{1}{2}x^2-2x-6}{x+2}=-\dfrac{1}{2}$，解得$x=-2$（舍去）或$x=5$，此进$F$点坐标为$\left(5,-\dfrac{7}{2}\right)$．

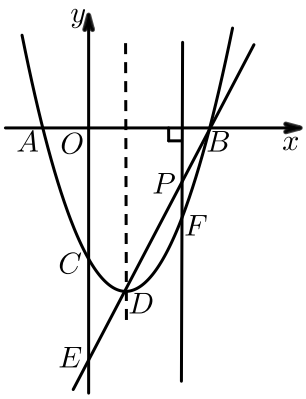
综上可知F点的坐标为$\left(7,\dfrac{9}{2}\right)$或$\left(5,-\dfrac{7}{2}\right)$．

【标注】【题型】题型：二次函数与相似三角形结合

8. 抛物线$y=x^2-bx+c$与x轴交于点$A(-1,0)$，$B(3,0)$，与y轴交于点C，顶点为D，直线BD与y轴交于点E．

（1）求顶点D的坐标．

（2）如图，设点P为线段BD上一动点（点P不于点B、D重合），过点P作x轴的垂线与抛物线交于点F．求$\triangle BDF$的面积最大值．



（3）点Q在线段BD上，当$\angle BDC=\angle QCE$时，求点Q的坐标．（直接写出结果，不必写解答过程）．

【答案】（1）$(1,-4)$．

（2）1．

（3）$\left(\frac{9}{7},-\frac{24}{7}\right)$．

【解析】（1）∵抛物线$y=x^2-bx+c$与x轴交于点$A(-1,0)$，$B(3,0)$，

∴$\begin{cases}(-1)^2-b\times(-1)+c=0\\3^2-3b+c=0\end{cases}$，

解方程组得$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，

∴抛物线解析式为$y=x^2+2x-3$，

∵$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴顶点D的坐标为$(1,-4)$．

（2）设直线BD的解析式为$y=kx+b$，

∵$B(3,0)$，$D(1,-4)$，

∴$\begin{cases}3k+b=0\\k+b=-4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=2\\b=-6\end{cases}$，

∴$BD:y=2x-6$，

设P点的坐标为(m,n)，

∵点P为线段BD上一动点，且不与B、D重合，

∴$P(m,2m-6)(1<m<3)$，

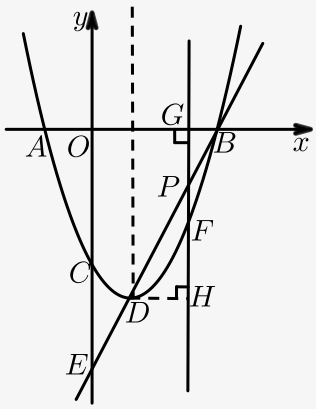
∵点F是过点P作x轴垂线与抛物线的交点，

∴$F(m,m^2-2m-3)$，

又∵点P在F上方，

∴$PF=2m-6-(m^2-2m-3)=-m^2+4m-3$，

设直线PF交x轴于点G，过点D作$DH\perp PF$于点H，



∵$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle PDF}+S_{\triangle PBF}$

$=\frac{1}{2}PF\cdot DH+\frac{1}{2}PF\cdot BG$

$=\frac{1}{2}PF\cdot(DH+BG)$

$=\frac{1}{2}\times(-m^2+4m-3)\times(3-1)$

$=-m^2+4m-3$

$=-(m-2)^2+1$.

$\therefore S_{\triangle BDF}$是关于$m$的二次函数，

$\because a=-1<0$，

$\therefore$当$m=2$时，$\triangle BDF$面积取最大值，最大值为1 .

（ 3 ）点Q的坐标为$\left(\frac{9}{7},-\frac{24}{7}\right)$，连接$BC$、$CD$，

$B(3,0)$，$C(0,-3)$，$D(1,-4)$，

根据勾股定理可得$BC^2=3^2+3^2=18$，

$CD^2=1^2+1^2=2$，

$BD^2=2^2+4^2=20$，

$\therefore BD^2=BC^2+CD^2$，

$\therefore \angle BCD=90°$，

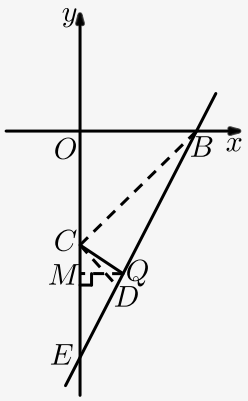
$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，$\tan\angle BDC=\frac{BC}{CD}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=3$，

$\because \angle BDC=\angle QCE$，

$\therefore \tan\angle QCE=3$，

设点Q的坐标为$(n,2n-6)$，

过点Q作$QM\perp CE$于点M，



在$\mathrm{Rt}\triangle CMQ$中，

$\tan\angle MCQ=\frac{QM}{MC}=\frac{n}{3-2n}=3$，

解得$n=\frac{9}{7}$，

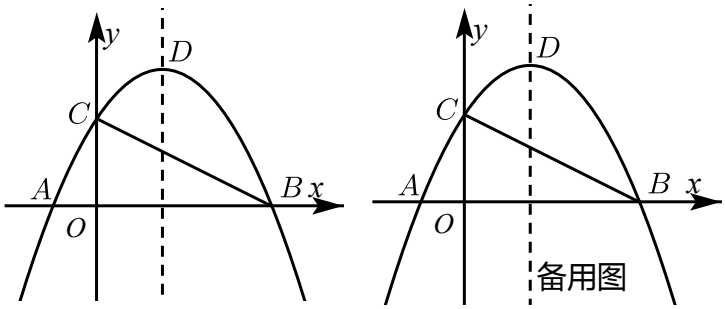
$\therefore 2n-6=-\frac{24}{7}$，

$\therefore$点Q坐标为$\left(\frac{9}{7},-\frac{24}{7}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9.

如图平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2-3ax-4a$的图象经过点$C(0,2)$，交x轴于点A，B（A点在B点的左侧），顶点为D．



（1）求抛物线的解析式和点A、B的坐标．

（2）将三角形ABC沿着直线BC对折，点A的对称点为A'，试着求A'的坐标．

（3）抛物线的对称轴上是否存在点P，使得$\angle BPC=\angle BAC$？若存在，求出点P的坐标，若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$；$A(-1,0)$，$B(4,0)$．

（2）$A'(1,4)$．

（3）存在；P的坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$或$\left(\frac{3}{2},2+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$．

【解析】（1）把$(0,2)$代入$y=ax^2-3ax-4a$得$-4a=2$，

解得$a=-\frac{1}{2}$，

所以抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，

令$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，可得：$x_1=-1$，$x_2=4$，

所以$A(-1,0)$，$B(4,0)$．

（2）如图2，作$A'H\perp x$轴于H，

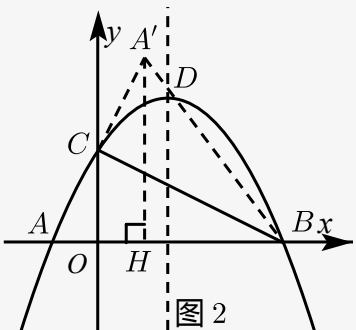


图 2

因为$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$，有$\angle AOC=\angle COB=90°$，

所以$\triangle AOC\backsim\triangle COB$，

所以$\angle ACO=\angle CBO$，可得$\angle ACB=\angle OBC+\angle BCO=90°$，

由$A'H//OC$，$AC=A'C$得$OH=OA=1$，

$A'H=2OC=4$．

所以$A'(1,4)$．

（ 3 ）分两种情况：

① 如图3，以AB为直径作⊙M，⊙M交抛物线的对称轴于P（ BC的下方），

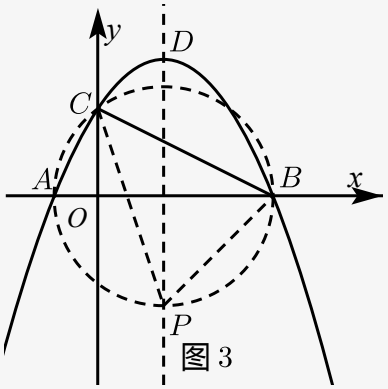


图 3

由圆周角定理得$\angle CPB=\angle CAB$，

易得：$MP=\frac{1}{2}AB$，所以$P\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$．

② 如图4，类比第（ 2 ）小题的背景将△ABC沿直线BC对折，

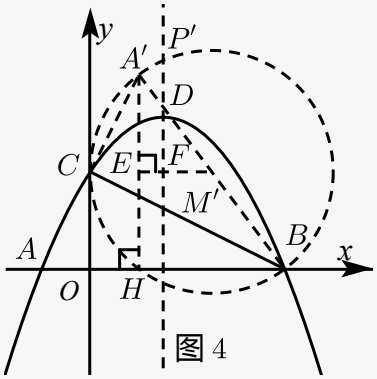


图 4

点A的对称点A'，以$A'B$为直线作⊙M'，⊙M'交抛物线的对称轴于P'（ BC的上方），

则$\angle CP_2B=\angle CA'B=\angle CAB$．

作$M'E\perp A'H$于E，交对称轴于F，

则$M'E=\frac{1}{2}BH=\frac{3}{2}$，$EF=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，

所以$M'F=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$．

在$\mathrm{Rt}\triangle M'P'F$中，

所以$P'M=2+\frac{\sqrt{21}}{2}$，

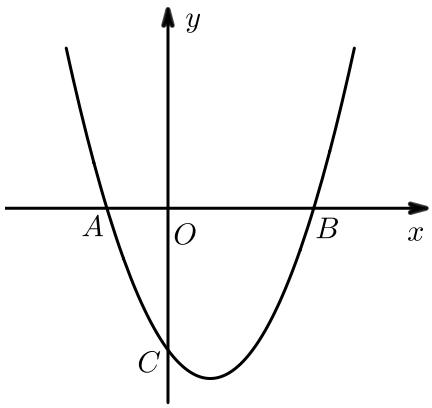
所以$P'\left(\frac{3}{2},2+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$．

综上所述，P的坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$或$\left(\frac{3}{2},2+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

三、 和差角问题

10. 如图，已知抛物线C_1的顶点为$E\left(\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$，与$x$轴交于点$A$、$B$（点$A$在点$B$左侧），与$y$轴交于点$C(0,-2)$．



（ 1 ）求抛物线C_1的解析式．

（ 2 ）点D是抛物线C_1上一点，且$\angle ACO+\angle BCD=45°$，求点$D$的坐标．

【答案】（ 1 ）$y=x^2-x-2$．

（ 2 ）$D_1(3,4)$，$D_2\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$．

【解析】（ 1 ）设$C_1:y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，

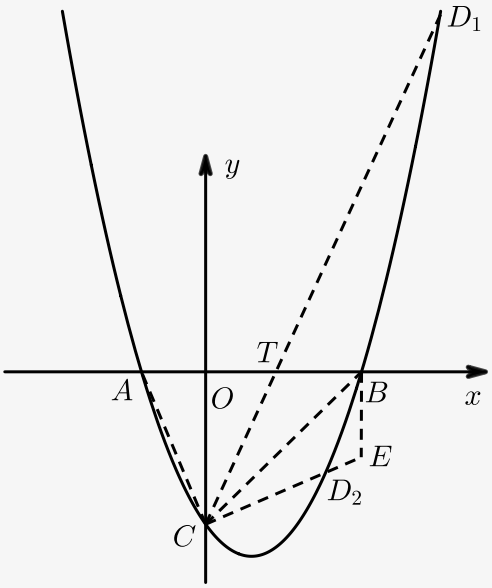
过$C(0,-2)$，

$\therefore\frac{1}{4}a-\frac{9}{4}=-2$，

$\therefore a=1$，

$\therefore y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=x^2-x-2$．

（ 2 ）如图，



由(1)，$A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,-2)$，

$\therefore OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45^\circ$，

$\because \angle ACO+\angle BCD=45^\circ$，

$\therefore \angle BCD=45^\circ-\angle ACO$，

在OB上取$OT=OA=1$，

则$\angle ACO=\angle TCO$，

$\therefore \angle ACO+\angle BCT=45^\circ$，

可见CT延长线与抛物线交于D，记为D_1，

$\because C(0,-2)$，$T(1,0)$，

$\therefore CT:y=2x-2$，

联立$\begin{cases}y=2x-2\\y=x^2-x-2\end{cases}$，

$\therefore x^2-3x=0$，

$x_1=0$，$x_2=3$，

$\therefore D_1(3,4)$，

过B作$BE\perp x$轴于E使$BE=BT=1$，

则$\angle TBC=\angle EBC=45^\circ$，

$\triangle TBC\cong\triangle EBC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle BCE=\angle BCD_1$，

$\therefore CE$与抛物线交于D，记为D_2，

$\because E(2,-1)$，$C(0,-2)$，

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}x-2$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-2\\y=x^2-x-2\end{cases}$，

$x^2-\frac{3}{2}x=0$，

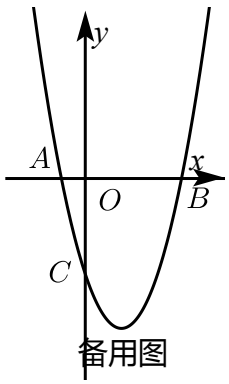
$x_1=0$，$x_2=\frac{3}{2}$，

$D_2\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$，

综上$D_1(3,4)$，$D_2\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

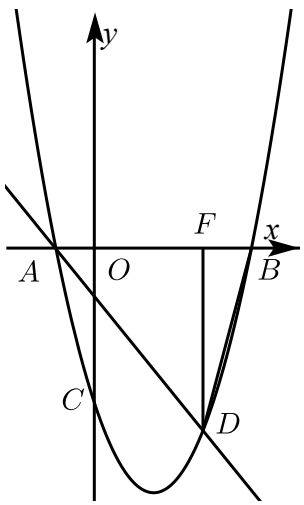
11. 如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$过$A(-1,0)$，$B(6,0)$，$C(0,-6)$．



备用图

（ 1 ）求该抛物线的解析式．

（ 2 ）过D作$DF\perp AB$于F，连结BD，点G是抛物线上一点，使$\angle DAG+\angle BDF=\angle BAD$，若存在这样的$G$点，请直接写出点$G$坐标，若不存在，请说明理由．



【答案】（ 1 ）$y=x^2-5x-6$．

（ 2 ）存在，$G(5,-1)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

四、 倍半角问题

12. 在平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2-4ax+3a(a>0)$与x轴交于A，B两点（A点在B点左侧），与y轴交于点C．

如图1，当$OC=\frac{3}{2}$时．

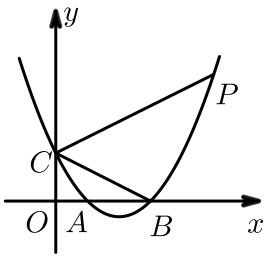


图1

① 求抛物线的表达式．

② 点P为B点右侧抛物线上一点，连接PC，若$\angle BCP=2\angle ABC$，求点P的坐标．

【答案】（ 1 ）① $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$．

② $P(5,4)$．

【解析】（ 1 ）① 令$y=ax^2-4ax+3a=0$，解得：$x=1$或3，令$x=0$，则$y=3a$，

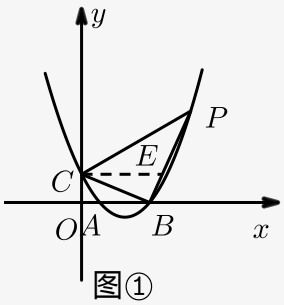
则点A、B、C的坐标分别为$(1,0)$、$(3,0)$、$(0,3a)$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times OC=\frac{1}{2}\times 2\times 3a=\frac{3}{2}$，解得：$a=\frac{1}{2}$，

故抛物线的表达式为：$y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$①．

故答案为：$y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$．

② 如图，过点C作$CE//x$轴交直线BP于点E，



图①

$\therefore\angle ABC=\angle ECB=\frac{1}{2}\angle PCB$，而$\angle BCP=2\angle ABC$，

$\therefore\angle ABC=\angle ECB=\angle PCE=\alpha$，

$\tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}=\tan\alpha$，

则直线PC的表达式为：$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$②，

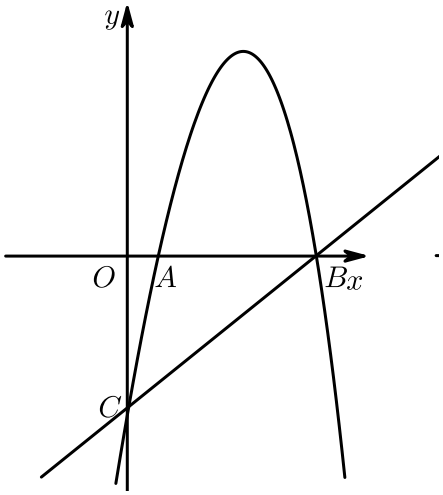
①②联立并解得：$x=5$或0（舍去0），

故点$P(5,4)$．

故答案为：$P(5,4)$．

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

13. 如图，抛物线$y=ax^2+6x+c$交x轴于A，B两点，交y轴于点C．直线$y=x-5$经过点B，C．

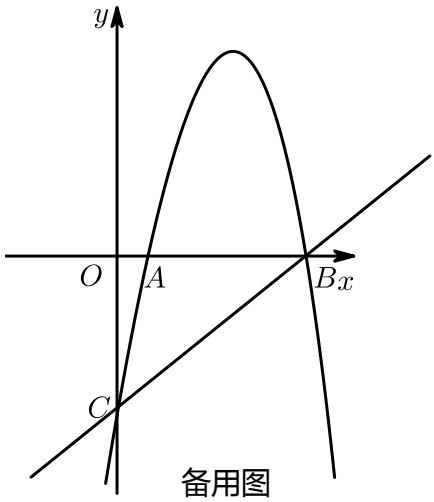


（1）求抛物线的解析式．

（2）过点A的直线交直线BC于点M．

① 当$AM\perp BC$时，过抛物线上一动点P（不与点B，C重合），作直线AM的平行线交直线BC于点Q，若以点A、M、P、Q为顶点的四边形是平行四边形，求点P的横坐标．

② 连接AC，当直线AM与直线BC的夹角等于$\angle ACB$的2倍时，请直接写出点M的坐标．



备用图

【答案】（1）抛物线的解析式为$y=-x^2+6x-5$．

（2）① P点的横坐标为4或$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$或$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$．

② 点M的坐标为$\left(\frac{13}{6},-\frac{17}{6}\right)$或$\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$．

【解析】（ 1 ）当$x=0$时，$y=x-5=-5$，则$C(0,-5)$，

当$y=0$时，$x-5=0$，解得$x=5$，则$B(5,0)$，

把$B(5,0)$，$C(0,-5)$代入$y=ax^2+6x+c$得$\begin{cases}25a+30+c=0\\c=-5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\c=-5\end{cases}$，

$\therefore$抛物线的解析式为$y=-x^2+6x-5$．

（ 2 ）① 解方程$-x^2+6x-5=0$得$x_1=1,x_2=5$，则$A(1,0)$，

$\because B(5,0)$，$C(0,-5)$，

$\therefore \triangle OCB$为等腰直角三角形，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45°$，

$\because AM\perp BC$，

$\therefore \triangle AMB$为等腰直角三角形，

$\therefore AM=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4=2\sqrt{2}$，

$\because$以点A,M,P,Q为顶点的四边形是平行四边形，

$AM//PQ$，

$\therefore PQ=AM=2\sqrt{2}$，$PQ\perp BC$，

作$PD\perp x$轴交直线BC于D，如图1，则$\angle PDQ=45°$，

$\therefore PD=\sqrt{2}PQ=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$，

设$P\left(m,-m^2+6m-5\right)$，则$D(m,m-5)$，

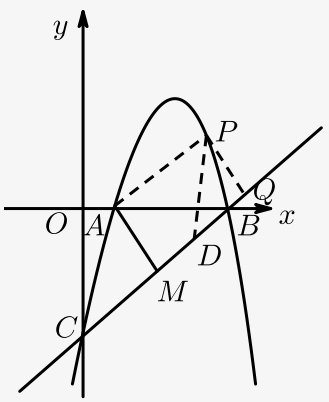
当P点在直线BC上方时，

$PD=-m^2+6m-5-(m-5)=-m^2+5m=4$，解得$m_1=1$，$m_2=4$，

当P点在直线BC下方时，

$PD=m-5-\left(-m^2+6m-5\right)=m^2-5m=4$，解得$m_1=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$，$m_2=\frac{5-\sqrt{41}}{2}$，

综上所述，P点的横坐标为4或$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$或$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$．



② 作$AN\perp BC$于N，$NH\perp x$轴于H，作AC的垂直平分线交BC于M_1，交AC于E，连接AM_1，如图2，

$\because M_1A=M_1C$，

$\therefore \angle ACM_1=\angle CAM_1$，

$\therefore \angle AM_1B=2\angle ACB$，

$\because \triangle ANB$为等腰直角三角形，

$\therefore AH=BH=NH=2$，

$\therefore N(3,-2)$，

易得直线AC的解析式为$y=5x-5$，

E点坐标为$\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$，

设直线EM_1的解析式为$y=-\frac{1}{5}x+b$，

把$E\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$的坐标代入得$-\frac{1}{10}+b=-\frac{5}{2}$，解得$b=-\frac{12}{5}$，

$\therefore$直线EM_1的解析式为$y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}$，

解方程组$\begin{cases}y=x-5\\y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{13}{6}\\y=-\frac{17}{6}\end{cases}$，则$M_1\left(\frac{13}{6},-\frac{17}{6}\right)$；

在直线BC上作点M_1关于N点的对称点M_2，连接AM_2，如图2，则$\angle AM_2C=\angle AM_1B=2\angle ACB$，

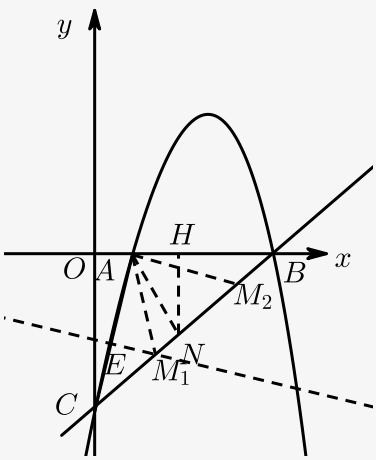
设$M_2(x,x-5)$，

$\because 3=\frac{\frac{13}{6}+x}{2}$，

$\therefore x=\frac{23}{6}$，

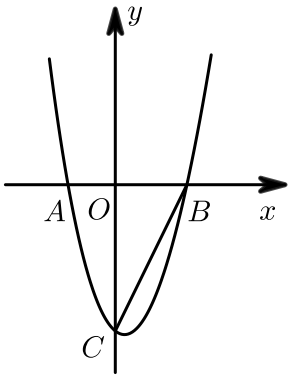
$\therefore M_2\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$，

综上所述，点M的坐标为$\left(\frac{13}{6},-\frac{17}{6}\right)$或$\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$.



【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

14. 如图，抛物线$y=(x-3)(x-m)$交x轴于A，B两点（点A在原点的左侧），交y轴于点C，连接BC．且$\frac{OA}{OB}=\frac{2}{3}$．



（1）求抛物线的函数表达式．

（2）P为线段OC上的一点，Q为抛物线上的一点．

① 若$\angle BPO=2\angle BCO$，求点P的坐标．

② 若$\angle QBA=2\angle BCO$，求点Q的坐标．

【答案】（1）$y=x^2-x-6$．

（2）① $P\left(0,-\frac{9}{4}\right)$．

② $Q\left(-\frac{10}{3},\frac{76}{9}\right)$或$Q\left(-\frac{2}{3},-\frac{44}{9}\right)$．

【解析】（1）令$y=0$，则$(x-3)(x-m)=0$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=m$，

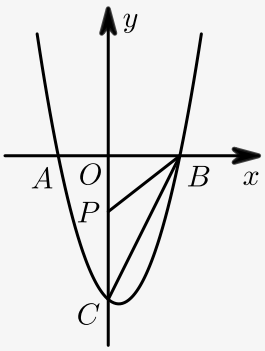
$\because$点A在原点的左侧，且$\frac{OA}{OB}=\frac{2}{3}$，

$\therefore OA=2$，

$\therefore m=-2$，

$\therefore y=(x-3)(x+2)=x^2-x-6$．

（2）① 令$x=0$，则$y=-6$，



$\therefore C(0,-6)$，

设$P(0,n)$，则$OP=-n$，$PC=n+6$，

$\because \angle BPO=2\angle BCO=\angle BCO+\angle PBC$，

$\therefore \angle BCO=\angle PBC$，

$\therefore BP=PC=n+6$，

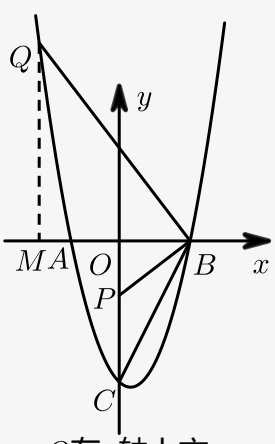
又$\because OP^2+OB^2=BP^2$，

$\therefore (-n)^2+3^2=(n+6)^2$，

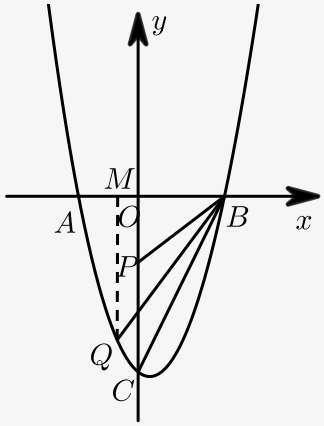
$\therefore n=-\dfrac{9}{4}$，

$\therefore P\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)$.

② 设$Q\left(x,x^2-x-6\right)$，过点Q作$QM\perp x$轴于点M，



Q在x轴上方



Q在x轴下方

$\because \angle QBA=2\angle BCO$，$\angle BPO=2\angle BCO$，

$\therefore \angle QBA=\angle BPO$，

又$\because \angle BMQ=\angle BOP=90°$，

$\therefore \triangle BQM\backsim\triangle PBO$，

$\therefore \dfrac{QM}{OB}=\dfrac{BM}{OP}$，

即：$\dfrac{x^2-x-6}{3}=\dfrac{3-x}{\frac{9}{4}}$或$\dfrac{-x^2+x+6}{3}=\dfrac{3-x}{\frac{9}{4}}$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=-\dfrac{10}{3}$或$x_1=3$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$.

$$\therefore Q\left(-\frac{10}{3},\frac{76}{9}\right)\text{或}Q\left(-\frac{2}{3},-\frac{44}{9}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与角度问题